

ANALISIS KESTABILAN DAN KENDALI OPTIMAL PADA MODEL DINAMIKA MODULASI ENERGI CAHAYA DALAM FOTOSINTESIS ALGA

Nailul Izzati

(Program Studi Teknik Elektro, Fakultas Teknik, Universitas Hasyim Asy'ari Tebuireng)
nellizz89@yahoo.com

Abstrak

Penelitian tentang alga sebagai sumber energi alternatif masih terus dikembangkan. Model dinamika modulasi energi cahaya dalam fotosintesis alga merupakan salah satu model pertumbuhan alga yang mempertimbangkan pengaruh intensitas cahaya terhadap produktivitas *Photosynthetic Unit* (PSU). Budidaya alga memerlukan biaya dan perawatan, sehingga diperlukan pengendalian agar diperoleh hasil budidaya yang optimal. Dalam penelitian ini dilakukan pengendalian intensitas cahaya terhadap model. Kemudian dianalisa kestabilan dari titik kesetimbangan model, serta keterkontrolan dan keteramatan model. Prinsip minimum Pontryagin digunakan untuk menyelesaikan masalah kendali optimal pada model. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik dengan DOTcvpSB. Hasil analisa menunjukkan bahwa titik kesetimbangan model bersifat stabil bersyarat, dan model bersifat terkontrol serta teramati. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa model dengan pengendalian intensitas cahaya menghasilkan PSU dalam keadaan tidak aktif yang lebih sedikit dan membutuhkan energi yang lebih rendah daripada model tanpa pengendalian.

Kata Kunci: alga, analisis kestabilan, kendali optimal, prinsip minimum Pontryagin, *Photosynthetic Unit* (PSU).

Abstract

The study about algae as an alternative energy source have been developing. The dynamic modulation of light energy model is one of algae growth model that considering the effect of light intensity to *Photosynthetic Unit* (PSU) productivity. Algae cultivation requires cost and maintenance, thus we need some control methods, in order to obtaining optimal harvest. This study discusses light intensity control in algae growth model. Stability, controllability, and observability analysis of the model are also discussed in this study. Pontryagin minimum principle is used to solve optimal control problem on the model. Then it simulated by DOTcvpSB. Analytical results show that the equilibrium point of the model is conditional stable, and the model is controlable and observable. The numerical simulation shows that the model with light intensity control yields less inactive PSU and needs less energy than the model without light intensity control.

Keywords: algae, optimal control, Pontryagin minimum principle, *Photosynthetic Unit* (PSU), stability analysis.

PENDAHULUAN

Kebutuhan manusia akan sumber energi alternatif semakin meningkat seiring dengan semakin menipisnya sumber energi fosil. Mulai beberapa dekade terakhir, para ilmuwan terus mengembangkan sumber daya energi alternatif. Salah satu sumber energi alternatif yang dikembangkan adalah alga. Alga dibudidayakan untuk kemudian dimanfaatkan biomassa dan minyaknya. Biomassa dan minyak dari alga kemudian diolah menjadi biodiesel.

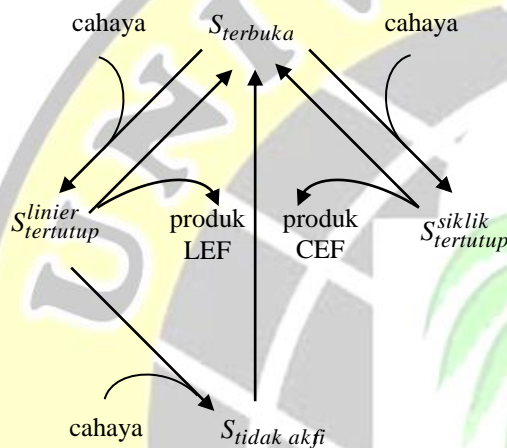
Berbagai model matematika dibangun untuk menggambarkan pertumbuhan alga. Eilers dan Peeters (1988:199; 1993:113) membangun model matematika untuk menggambarkan hubungan intensitas cahaya terhadap fotosintesis dan fotoinhibisi pada pertumbuhan fitoplankton. Dalam model Eilers-Peeters, dibahas

pengaruh intensitas cahaya terhadap transisi keadaan *Photosynthetic Factories* (PSF). Terdapat tiga keadaan PSF, yaitu keadaan istirahat, keadaan aktif, dan keadaan terhambat. PSF berada dalam keadaan istirahat jika sel alga menangkap intensitas cahaya yang terlalu sedikit. PSF yang berada dalam keadaan istirahat, dapat menjadi aktif sewaktu-waktu. PSF menjadi aktif jika memperoleh intensitas cahaya yang sesuai dengan kebutuhannya untuk bertumbuh. Sedangkan jika PSF menangkap intensitas cahaya yang terlalu banyak, maka PSF berada dalam keadaan terhambat (Nauha dan Alopaeus, 2013: 559).

Model Eilers-Peeters kemudian digunakan oleh Wu dan Merchuk (2001:3527) serta Marshall dan Huang (2010:3865) untuk melakukan penelitian tentang pertumbuhan alga dalam bioreaktor dengan pembatasan cahaya. Dalam penelitian Wu dan Merchuk ditemukan konstanta transisi PSF. Sedangkan dalam penelitian

Marshall dan Huang, dilakukan simulasi pertumbuhan alga dengan pembatasan cahaya dalam bioreaktor dengan adukan yang homogen.

Papadakis dkk. (2012:255) membangun model matematika untuk menggambarkan hubungan intensitas cahaya terhadap fotoinhibisi dan proses pemulihannya pada pertumbuhan alga. Model tersebut membahas pengaruh intensitas cahaya terhadap transisi keadaan *Photosynthetic Unit* (PSU). PSU adalah struktur fungsional paling sederhana dan paling minimum dari aparat fotosintesis. Diasumsikan bahwa PSU terdiri dari *light harvesting complex* (LHC), fotosistem, cytb6f, dan ATPase.



Gambar 1. Empat Transisi Keadaan PSU Pada Model Dinamika Modulasi Energi Cahaya dalam Alga Fotosintetik

Gambar 1 mengilustrasikan bahwa terdapat empat transisi keadaan PSU, yaitu PSU terbuka, PSU tertutup dan melayani LEF, PSU tertutup dan melayani CEF, dan PSU tidak aktif. LHC dari suatu PSU terbuka, $S_{terbuka}$ menyerap foton yang memadai untuk kegunaan *photochemical*, kemudian PSU menjadi tertutup. Ketika energi eksitasi dialokasikan ke LEF, keadaan PSU dinotasikan sebagai $S_{tertutup}^{linier}$ dan ketika dialokasikan ke CEF, keadaan PSU dinotasikan sebagai $S_{tertutup}^{siklik}$. Dalam kondisi fisiologi, suatu PSU tertutup menghasilkan produknya dan menjadi terbuka. Namun, penyerapan energi yang berlebih oleh PSU yang tertutup, menyebabkan kerusakan yang *irreversible* dan menyebabkannya menjadi dalam keadaan tidak aktif, $S_{tidak\ aktif}$. Fotoinaktivasi dari suatu PSU fungsional dapat terjadi pada suatu intensitas cahaya tampak atau sinar UV ketika PSU fungsional tersebut dalam keadaan $S_{tertutup}^{linier}$ dan dibanjiri oleh sejumlah energi yang melebihi batas kemampuan pengaturan PSU. Pemulihan PSU yang

tidak aktif menghasilkan PSU terbuka yang fungsional, namun tidak ada produk yang dihasilkan.

Dinamika transisi keadaan PSU tersebut dimodelkan dengan model matematika dinamika modulasi energi cahaya dalam fotosintesis alga dinyatakan oleh sistem persamaan (1)-(4).

$$\frac{dS_O}{dt} = -(j_{LL} + j_{LC})S_O + k_L S_L + k_C S_C + k_R S_I, \quad (1)$$

$$\frac{dS_L}{dt} = j_{LL} S_O - j_{LI} S_L - k_L S_L, \quad (2)$$

$$\frac{dS_C}{dt} = j_{LC} S_O - k_C S_C, \quad (3)$$

$$\frac{dS_I}{dt} = j_{LI} S_L - k_R S_I, \quad (4)$$

dengan $S_O + S_L + S_C + S_I = 1$.

Sistem persamaan (1)-(4) menggambarkan transisi keadaan PSU dari satu keadaan ke keadaan yang lain. Secara berurutan, variabel keadaan S_O , S_L , S_C , dan S_I merepresentasikan fraksi PSU dalam keadaan $S_{terbuka}$ PSU dalam keadaan $S_{tertutup}^{linier}$ PSU dalam keadaan $S_{tertutup}^{siklik}$ dan PSU dalam keadaan $S_{tidak\ aktif}$. $j_{LL} = \rho_L j_L / n_L$ dan $j_{LC} = \rho_C j_L / n_C$, merepresentasikan aliran jaringan dari energi eksitasi menuju LEF dan CEF, sedangkan $j_{LI} = \rho_I j_L / n_I$ adalah aliran jaringan dari foton-foton yang menuju LEF saat PSU tidak aktif. $j_L = \sigma A_C I / N$ adalah laju kedatangan proton, dengan σ adalah porsi foton yang tepat mengenai PSU, A_C adalah luas permukaan sel yang diberi pencahayaan, I adalah intensitas cahaya yang diberikan sebagai nutrisi alga, dan N adalah jumlah total PSU per sel. ρ_L, ρ_C, ρ_I adalah probabilitas foton yang diserap oleh LEF, CEF dan saat inaktif. n_L, n_C, n_I adalah jumlah foton yang dibutuhkan bagi suatu PSU untuk melayani LEF, CEF, dan untuk menjadi tidak aktif. k_L dan k_C merepresentasikan laju pengolahan produk dari LEF dan CEF, sedangkan k_R adalah laju pemulihan dari PSU yang tidak aktif menjadi PSU fungsional.

Dalam pengaturan budidaya alga diperlukan biaya dan perawatan. Oleh karena itu, diperlukan pemahaman perilaku dinamika pertumbuhan alga dalam bioreaktor, yang dapat diketahui dengan menganalisis kestabilan titik kesetimbangan pada model pertumbuhan alga. Selain itu, diperlukan pula pengendalian proses budidaya alga agar mencapai kondisi optimal, artinya dihasilkan produk yang maksimal dengan biaya yang minimal. Untuk itu perlu dibangun masalah kendali optimal pada model budidaya alga. Salah satu metode untuk menyelesaikan masalah pengendalian optimal adalah prinsip minimum Pontryagin (Naidu, 2004:6).

Dalam penelitian ini, dilakukan pengendalian dalam model dinamika modulasi energi cahaya dalam fotosintesis alga serta analisa kestabilan, keterkontrolan dan keteramatan model. Selanjutnya dibahas mengenai masalah kendali optimal serta penyelesaiannya. Kemudian simulasi numerik dilakukan untuk mengetahui perbedaan antara model dinamika modulasi energi cahaya dalam fotosintesis alga sebelum dan sesudah dilakukan pengendalian.

METODE

Pada bagian ini dibahas tentang metode yang digunakan dalam penelitian ini. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah: (1) menentukan variabel kendali pada model untuk membangun model matematika dinamika modulasi energi cahaya dalam fotosintesis alga dengan pengendalian; (2) menganalisis kestabilan titik kesetimbangan dari model dengan pengendalian. Analisis kestabilan dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz; (3) mengecek matriks keterkontrolan dan keteramatan dari model dengan pengendalian; (4) membangun fungsi tujuan dalam masalah kendali optimal pada model; (4) menyelesaikan masalah kendali optimal dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin; (5) melakukan simulasi numerik dari pada model dengan kendali optimal dengan menggunakan *toolbox* DOTcvpSB.

Kriteria Routh-Hurwitz

Misalkan persamaan karakteristik suatu sistem dinyatakan oleh polinomial

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Sifat kestabilan titik kesetimbangan sistem tersebut dapat diketahui dengan menyusun tabel kriteria Routh-Hurwitz berikut ini.

λ^n	a_0	a_2	a_4	...	← baris pertama
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	...	← baris kedua
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	...	
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	...	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
λ^3	d_1	d_2	0		
λ^2	e_1	e_2	0		
λ^1	f_1	0			
λ^0	g_1				
	↑				

kolom pertama

Dengan

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1},$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \quad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1},$$

$$\vdots$$

$$f_1 = \frac{e_1 d_2 - d_1 e_2}{e_1},$$

dan seterusnya.

Titik kesetimbangan sistem bersifat stabil jika tidak terdapat perubahan tanda pada kolom pertama tabel kriteria Routh-Hurwitz. (Brannan dan Boyce, 2011:382; Robandi, 2009:107).

Keteramatan dan Keterkontrolan

Pengetahuan tentang keteramatan dan keterkontrolan suatu sistem perlu dilakukan sebelum melakukan pengendalian. Suatu sistem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

disebut terkontrol jika rank dari matriks keterkontrolan M_c sama dengan matriks A , dan disebut teramati jika rank dari matriks keteramatan M_o sama dengan matriks A , dengan

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

dan

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{Hsu, 1995:405; Robandi, 2009:95}).$$

Prinsip Minimum Pontryagin

Masalah kendali optimal terdiri dari tiga komponen utama, yaitu model matematika, fungsi tujuan, dan syarat batas serta kendala dari variabel *state*/kendali.

Misalkan model matematika diberikan oleh

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),$$

dan fungsi tujuannya dinyatakan oleh

$$J = S(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt,$$

dengan syarat batas

$$\mathbf{x}(t_0 = 0) = \mathbf{x}_0, \text{ dan } \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f,$$

dan kendala fisis

$$\mathbf{U}_- \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{U}_+ \text{ dan } \mathbf{X}_- \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{X}_+.$$

Untuk menyelesaikan masalah kendali optimal dengan prinsip minimum Pontryagin, diperlukan langkah-langkah berikut ini (Naidu, 2004:69):

- 1) Bentuk fungsi Hamiltonian

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda'(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$
- 2) Temukan kendali optimal $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), \lambda^*(t), t)$ dengan meminimumkan H terhadap $\mathbf{u}(t)$.

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}\right)_* = 0$$

- 3) Substitusikan kendali optimal $\mathbf{u}^*(t)$ ke dalam fungsi Hamiltonian, sehingga diperoleh Hamiltonian optimal.

$$H^*(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t)$$

- 4) Selesaikan persamaan diferensial *state* dan *costate*

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)_* \text{ dan } \dot{\lambda}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_*$$

dengan syarat awal dan akhir

$$\left(H + \frac{\partial S}{\partial t}\right)_{*t_f} \delta \mathbf{x}_f + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right) - \lambda(t)\right)_{*t_f} \delta \mathbf{x}_f = 0.$$

DOTcvpSB

DOTcvpSB adalah suatu *toolbox* pada MATLAB yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah kendali optimal secara numerik. Fokus *toolbox* DOTcvpSB adalah pada masalah-masalah sistem biologi. Untuk menyelesaikan masalah kendali optimal dengan *toolbox* ini, perlu didefinisikan persamaan diferensial biasa, yang mendeskripsikan sistem, fungsi tujuan, masalah waktu awal dan akhir, kendala-kendala dari variabel, dan syarat awal dan akhir. *Toolbox* ini juga dapat digunakan untuk menunjukkan dinamika sistem tanpa optimasi (Hirmajer dkk., 2009:199).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Dinamika Modulasi Energi Cahaya dalam Fotosintesis Alga dengan Pengendalian

Pada model matematika dinamika modulasi energi cahaya dalam fotosintesis alga, faktor lingkungan atau eksternal yang mempengaruhi pertumbuhan alga adalah intensitas cahaya I , sehingga dapat dikatakan bahwa intensitas cahaya mempunyai peran besar pada sistem yang dinyatakan oleh persamaan (1)-(4). Dengan mengatur intensitas cahaya sedemikian rupa akan diperoleh variabel keadaan-variabel keadaan yang optimal pada sistem, yakni PSU yang dalam keadaan terbuka (S_O), PSU yang dalam keadaan tertutup dan linier (S_L), PSU yang dalam keadaan tertutup dan siklik (S_C) dan PSU yang dalam keadaan tidak aktif (S_I) yang optimal. Dengan demikian, dapat diasumsikan bahwa intensitas cahaya dapat diatur dengan memberikan variabel kendali pada sistem. Misalkan variabel kendali pada sistem dinotasikan sebagai u , yaitu faktor yang mempengaruhi besar kecilnya intensitas cahaya yang diberikan, maka model matematika pertumbuhan alga dalam pembatasan cahaya dengan pengendalian dapat dinyatakan oleh persamaan (5)-(8).

$$\frac{dS_O}{dt} = -u(j_{LL} + j_{LC})S_O + k_L S_L + k_C S_C + k_R S_I, \quad (5)$$

$$\frac{dS_L}{dt} = u j_{LL} S_O - u j_{LI} S_L - k_L S_L, \quad (6)$$

$$\frac{dS_C}{dt} = u j_{LC} S_O - k_C S_C, \quad (7)$$

$$\frac{dS_I}{dt} = u j_{LI} S_L - k_R S_I. \quad (8)$$

Dengan kendala $0 < u \leq U$. Artinya, intensitas cahaya dapat diperkecil sampai dengan hampir 0 dan dapat diperbesar sampai dengan U kali I . Dengan U merupakan nilai variabel kendali maksimal.

Dengan mengasumsikan bahwa yang diamati dalam sistem adalah PSU yang sedang dalam keadaan tertutup, yakni S_L dan S_C , serta PSU yang dalam keadaan tidak aktif S_I , maka matriks keluaran dari sistem (4)-(6) dapat dinyatakan oleh $C = [0 \ 1 \ 1 \ 1]$. Dengan demikian sistem (5)-(8) beserta keluarannya, dapat direpresentasikan dalam bentuk *state space* (9)-(11).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (9)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (10)$$

dengan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} S_O \\ S_L \\ S_C \\ S_I \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -u(j_{LL} + j_{LC}) & k_L & k_C & k_R \\ u j_{LL} & -u j_{LI} - k_L & 0 & 0 \\ u j_{LC} & 0 & -k_C & 0 \\ 0 & u j_{LI} & 0 & -k_R \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (-j_{LL} - j_{LC})S_O \\ j_{LL}S_O - j_{LI}S_L \\ j_{LC}S_O \\ j_{LI}S_L \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Pada bagian ini, dianalisis titik kesetimbangan sistem (5)-(8) untuk mengetahui perilaku solusi sistem. Titik kesetimbangan sistem adalah

$$E = \left(s, \frac{u j_{LL}}{k_L + u j_{LI}} s, \frac{u j_{LI}}{k_C} s, \frac{u^2 j_{LI} j_{LL}}{k_R (k_L + u j_{LI})} s \right),$$

dengan $s = S_O$.

Persamaan karakteristik dari sistem (5)-(8) adalah

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0, \quad (12)$$

dengan

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = u(j_{LL} + j_{LC} + j_{LI}) + k_L + k_C + k_R,$$

$$a_2 = u(j_{LL} + j_{LC})(u j_{LI} + k_L + k_C + k_R) + (u j_{LI} + k_L)(k_C + k_R) + k_C k_R - u k_L j_{LL} - u k_C j_{LC},$$

$$a_3 = u(j_{LL} + j_{LC})((u j_{LI} + k_L)(k_C + k_R) + k_C k_R) + (u j_{LI} + k_L)k_C k_R - u k_L j_{LL}(k_C + k_R)$$

$$- u k_C j_{LC}(u j_{LI} + k_L + k_R) - u^2 k_R j_{LI} j_{LC},$$

$$a_4 = u(j_{LL} + j_{LC})(uj_{LI} + k_L)k_C k_R - uk_L j_{LL} k_C k_R - uk_C j_{LC}(uj_{LI} + k_L)k_R - u^2 k_R j_{LL} j_{LC} k_C.$$

Tabel kriteria Routh-Hurwitz dari persamaan karakteristik (12) adalah sebagai berikut.

λ^4	a_0	a_2	a_4
λ^3	a_1	a_3	0
λ^2	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}$	$b_2 = a_4$	0
λ^1	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 a_4}{b_1}$	0	0
λ^0	$d_1 = b_2 = a_4$	0	0

a_0 dan a_1 bernilai positif. Oleh karena itu, titik kesetimbangan sistem (5)-(8) bersifat stabil jika $b_1 > 0$, $c_1 > 0$ dan $d_1 > 0$. Sehingga diperoleh syarat kestabilan titik kesetimbangan sistem (5)-(8) adalah $a_1 a_2 - a_3 > 0$, $b_1 a_3 - a_1 a_4 > 0$ dan $a_4 > 0$. Dari perhitungan $a_1 a_2 - a_3$, diperoleh nilai

$$a_1 a_2 - a_3 = u^3(j_{LC}^2 j_{LI} + j_{LC} j_{LI}^2 + 2j_{LL} j_{LC} j_{LI} + j_{LL}^2 j_{LI}) + u^3(j_{LL} j_{LI}^2) + u^2(j_{LC}^2 + 2j_{LC} j_{LI})(k_L + k_R) + u^2((j_{LL} j_{LC})(k_C + k_L + 2k_R) + (j_{LI}^2 + j_{LL}^2)(k_C + k_R)) + u^2(j_{LL} j_{LI})(2k_C + k_L + k_R) + u(j_{LC}(k_L^2 + 2k_L k_R + k_R^2) + j_{LL}(k_C^2 + 2k_C k_R + k_R^2)) + u j_{LI}(k_C^2 + 2k_C k_L + 2k_L k_R + 4k_C k_R + k_R^2) + k_C^2(k_L + k_R) + k_L^2(k_C + k_R) + k_R^2(k_C + k_L) + 4k_C k_L k_R.$$

Dari perhitungan $b_1 a_3 - a_1 a_4$ diperoleh nilai

$$b_1 a_3 - a_1 a_4 = j_{LC} j_{LI} u^2(2k_C + k_R) + j_{LL} j_{LI} u^2(k_C + 2k_R) + j_{LC} u(2k_C k_L + 2k_C k_R + k_R k_L) + 2j_{LL} u k_L(k_C + k_R) - k_C k_R k_L.$$

Dan dari perhitungan $a_4 > 0$, diperoleh syarat $j_{LI} > j_{LC}$.

Dikarenakan syarat $a_1 a_2 - a_3 > 0$ pasti terpenuhi, maka titik kesetimbangan E bersifat stabil jika $b_1 a_3 - a_1 a_4 > 0$ dan $j_{LI} > j_{LC}$. Artinya, jika $b_1 a_3 - a_1 a_4 > 0$ dan $j_{LI} > j_{LC}$ maka perilaku solusi dari sistem setelah mencapai waktu tertentu adalah konvergen menuju nilai $S_0 = s$,

$$S_L = \frac{uj_{LL}}{k_L + uj_{LI}} s, \quad S_C = \frac{uj_{LL}}{k_C} s \quad \text{dan} \quad S_I = \frac{u^2 j_{LI} j_{LL}}{k_R(k_L + uj_{LI})} s.$$

Keterkontrolan dan Keteramatan Model

Matriks keterkontrolan dari sistem (9)-(11) dinyatakan oleh

$$M_c = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

dengan

$$k_{11} = -(j_{LL} + j_{LC})S_0,$$

$$k_{12} = u(j_{LL} + j_{LC})^2 S_0 + (j_{LL} S_0 - j_{LI} S_L)k_L + k_C j_{LC} S_0 + k_R j_{LI} S_L,$$

$$k_{13} = -(j_{LL} + j_{LC})S_0 [u(j_{LL} + j_{LC})^2 + k_L u j_{LL} + k_C j_{LC}(u+1)] - (j_{LL} S_0 - j_{LI} S_L) [u(j_{LL} + j_{LC})k_L + (uj_{LI} + k_L)k_L - k_R u j_{LI}] - j_{LC} S_0 k_C^2 - j_{LI} S_L k_R [u(j_{LL} + j_{LC}) + k_R],$$

$$k_{14} = u(j_{LL} + j_{LC})S_0 [j_{LC} k_C [u(j_{LL} + j_{LC}) + k_C] + u(j_{LL} + j_{LC}) [u(j_{LL} + j_{LC})^2 + k_L j_{LL} + k_C j_{LC}] + j_{LL} [u(j_{LL} + j_{LC})k_L + (uj_{LI} + k_L)k_L - k_R u j_{LI}]] + (j_{LL} S_0 - j_{LI} S_L) [uk_L [u(j_{LL} + j_{LC})^2 + k_L j_{LL} + k_C j_{LC}] + (uj_{LI} + k_L) [u(j_{LL} + j_{LC})k_L + (uj_{LI} + k_L)k_L - k_R u j_{LI}]] - u j_{LI} k_R [u(j_{LL} + j_{LC}) + k_R]] + j_{LC} S_0 k_C [u^2(j_{LL} + j_{LC})^2 + k_L u j_{LL} + k_C u j_{LC} + u(j_{LL} + j_{LC})k_C + k_C^2] + j_{LI} S_L k_R [u^2(j_{LL} + j_{LC})^2 + k_L u j_{LL} + k_C u j_{LC} + u(j_{LL} + j_{LC})k_R + k_R^2],$$

$$k_{21} = j_{LL} S_0 - j_{LI} S_L,$$

$$k_{22} = -(j_{LL} + j_{LC})S_0 u j_{LL} - (uj_{LI} + k_L)(j_{LL} S_0 - j_{LI} S_L),$$

$$k_{23} = (j_{LL} + j_{LC})S_0 u j_{LL} [u(j_{LL} + j_{LC}) + (uj_{LI} + k_L)] + (j_{LL} S_0 - j_{LI} S_L) [u j_{LL} k_L + (uj_{LI} + k_L)^2] + j_{LC} S_0 u j_{LL} k_C + j_{LI} S_L u j_{LL} k_R,$$

$$k_{24} = -(j_{LL} + j_{LC})S_0 u j_{LL} [u(j_{LL} + j_{LC}) + u j_{LI} + k_L] + u j_{LL} k_L + (uj_{LI} + k_L)^2 + u j_{LC} k_C + (j_{LL} S_0 - j_{LI} S_L) [k_L u j_{LL} [-u(j_{LL} + j_{LC}) - (uj_{LI} + k_L)] - (uj_{LI} + k_L) [u j_{LL} k_L + (uj_{LI} + k_L)^2] + u^2 j_{LI} j_{LL} k_R] - j_{LC} S_0 u j_{LL} k_C [u(j_{LL} + j_{LC}) + (uj_{LI} + k_L) + k_C] - j_{LI} S_L u j_{LL} k_R [u(j_{LL} + j_{LC}) + (uj_{LI} + k_L) + k_R],$$

$$k_{31} = j_{LC} S_0, \quad k_{32} = -(j_{LL} + j_{LC})S_0 u j_{LC} - k_C j_{LC} S_0,$$

$$k_{33} = (j_{LL} + j_{LC})S_0 u j_{LC} [u(j_{LL} + j_{LC}) + k_C] + (j_{LL} S_0 - j_{LI} S_L) [u j_{LC} k_L] + j_{LC} S_0 [u j_{LC} k_C + k_C^2] + j_{LI} S_L u j_{LC} k_R,$$

$$k_{34} = -(j_{LL} + j_{LC})S_0 u j_{LC} [u(j_{LL} + j_{LC}) + k_C] + [u j_{LL} k_L + u j_{LC} k_C + k_C^2] - (j_{LL} S_0 - j_{LI} S_L) u j_{LC} [k_L [u(j_{LL} + j_{LC}) + k_C] + (uj_{LI} + k_L)k_L - u j_{LI} k_R] - j_{LC} S_0 k_C [u j_{LC} [u(j_{LL} + j_{LC}) + k_C] + k_C [u j_{LC} + k_C]] - j_{LI} S_L k_R u j_{LC} [u(j_{LL} + j_{LC}) + k_C + k_R],$$

$$k_{41} = j_{LI} S_L, \quad k_{42} = u j_{LI} (j_{LL} S_0 - j_{LI} S_L) - k_R j_{LI} S_L,$$

$$k_{43} = -(j_{LL} + j_{LC})S_0 u^2 j_{LI} j_{LL} - (j_{LL} S_0 - j_{LI} S_L) j_{LI} [(uj_{LI} + k_L) + k_R] + j_{LI} S_L k_R^2,$$

$$k_{44} = (j_{LL} + j_{LC})S_0 u^2 j_{LI} j_{LI} [u(j_{LL} + j_{LC}) + (uj_{LI} + k_L) + k_R] + (j_{LL} S_0 - j_{LI} S_L) u j_{LI} [(uj_{LI} + k_L)(uj_{LI} + k_L) + k_R] + k_L u j_{LL} + k_R^2 + j_{LC} S_0 k_C u^2 j_{LI} j_{LL} + j_{LI} S_L k_R [u^2 j_{LI} j_{LL} - k_R^2].$$

Sedangkan matriks keteramatannya dinyatakan oleh

$$M_o = \begin{bmatrix} o_{11} & o_{12} & o_{13} & o_{14} \\ o_{21} & o_{22} & o_{23} & o_{24} \\ o_{31} & o_{32} & o_{33} & o_{34} \\ o_{41} & o_{42} & o_{43} & o_{44} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} o_{11} &= 0, \quad o_{12} = 1, \quad o_{13} = 1, \quad o_{14} = 1, \\ o_{21} &= u_{jLL} + u_{jLC}, \quad o_{22} = -k_L, \quad o_{23} = -k_C, \quad o_{24} = -k_R, \\ o_{31} &= -(u_{jLL} + u_{jLC})^2 - u_{jLL}k_L - u_{jLC}k_C, \\ o_{32} &= u_{jLL}k_L + (u_{jLI} + k_L)^2 + u_{jLC}k_L - u_{jLI}(u_{jLI} + k_L + k_R), \\ o_{33} &= k_C[u_{jLL} + u_{jLC} + k_C], \\ o_{34} &= k_R[u_{jLL} + u_{jLC} + k_R], \\ o_{41} &= u_{jLL}[u(j_{LL} + j_{LC}) + (u_{jLI} + k_L) - u_{jLI}] \\ &\quad + u_{jLL}k_L + (u_{jLI} + k_L)^2 + u_{jLC}k_C \\ &\quad + u_{jLC}[u(j_{LL} + j_{LC}) + (u_{jLI} + k_L) + k_C] \\ &\quad + u_{jLL}k_L - k_C u_{jLC} + k_C^2 - u^2 j_{LL} j_{LI} [(u_{jLI} + k_L) + k_R], \\ o_{42} &= -k_L u_{jLL}[u(j_{LL} + j_{LC}) + (u_{jLI} + k_L)] \\ &\quad - (u_{jLI} + k_L)[u_{jLL}k_L + (u_{jLI} + k_L)^2] + u^2 j_{LI} j_{LL} k_R \\ &\quad - u_{jLC}[k_L[u(j_{LL} + j_{LC}) + k_C] + (u_{jLI} + k_L)k_L - u_{jLI}k_R] \\ &\quad + u_{jLI}[k_L u_{jLL} + (u_{jLI} + k_L)[(u_{jLI} + k_L) + k_R] + k_R^2], \\ o_{43} &= -k_C u_{jLL}[u(j_{LL} + j_{LC}) + (u_{jLI} + k_L) + k_C - u_{jLI}] \\ &\quad - k_C[u^2(j_{LL} + j_{LC})j_{LC} + k_C u_{jLC} + u_{jLC}k_C + k_C^2], \\ o_{44} &= -k_R u_{jLL}[u(j_{LL} + j_{LC}) + (u_{jLI} + k_L) + k_R] \\ &\quad - k_R u_{jLC}[u(j_{LL} + j_{LC}) + k_C + k_R] + k_R[u^2 j_{LI} j_{LL} - k_R^2]. \end{aligned}$$

Ukuran dari matriks A adalah $n = 4$. Rank dari matriks M_c dan matriks M_o adalah 4. Dengan demikian sistem (9)-(11) adalah sistem yang dapat dikendalikan dan dapat diamati.

Masalah Kendali Optimal dengan Prinsip Minimum Pontryagin

Masalah kendali optimal pada penelitian ini bertujuan untuk meminimalkan energi pencahayaan dan memaksimalkan pertumbuhan alga. Pertumbuhan alga yang optimal diperoleh jika PSU menghasilkan produk yang optimal. PSU yang menghasilkan produk adalah PSU yang dalam keadaan tertutup, sedangkan PSU yang dalam keadaan tidak aktif tidak menghasilkan produk. Sehingga dapat dikatakan bahwa tujuan dari masalah kendali optimal pada penelitian ini adalah meminimalkan energi pencahayaan dan PSU yang dalam keadaan tidak aktif. Dengan demikian, fungsi tujuannya dapat dituliskan secara matematis oleh persamaan (13).

$$\min J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{D}{2} u^2 + S_I \right) dt. \quad (13)$$

Dengan D merupakan bobot pengendalian. Dengan menerapkan prinsip minimum Pontryagin pada masalah

kendali optimal yang dinyatakan oleh sistem (5)-(8) dan fungsi tujuan (13), maka diperoleh hasil sebagai berikut:

1) Fungsi Hamiltonian

$$\begin{aligned} H &= \frac{D}{2} u^2 + S_I \\ &\quad + \lambda_1(-u(j_{LL} + j_{LC})S_O + k_L S_L + k_C S_C + k_R S_I) \\ &\quad + \lambda_2(u_{jLL} S_O - u_{jLI} S_L - k_L S_L) \\ &\quad + \lambda_3(u_{jLC} S_O - k_C S_C) + \lambda_4(u_{jLI} S_L - k_R S_I), \end{aligned} \quad (14)$$

2) Kendali optimal

$$u^* = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)j_{LL} S_O + (\lambda_1 - \lambda_3)j_{LC} S_O + (\lambda_2 - \lambda_4)j_{LI} S_L}{D} \quad (15)$$

3) Fungsi Hamiltonian optimal

$$\begin{aligned} H^* &= -\frac{1}{2D} \left[(\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)j_{LL}^2 S_O^2 \right. \\ &\quad + 2(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3)j_{LL}j_{LC} S_O^2 \\ &\quad + 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_4 - \lambda_2^2 + \lambda_2\lambda_4)j_{LI}j_{LL} S_O S_L \\ &\quad + (\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2)j_{LC}^2 S_O^2 \\ &\quad + 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4)j_{LI}j_{LC} S_O S_L \\ &\quad + (\lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_4 + \lambda_4^2)j_{LI}^2 S_L^2 \left. \right] \\ &\quad + S_I + \lambda_1(k_L S_L + k_C S_C + k_R S_I) - \lambda_2 k_L S_L \\ &\quad - \lambda_3 k_C S_C - \lambda_4 k_R S_I, \end{aligned} \quad (16)$$

4) Persamaan diferensial state dan costate optimal

$$\begin{aligned} \dot{S}_O &= \frac{1}{D} \left[(\lambda_2 - \lambda_1)j_{LL}^2 S_O^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)j_{LC}^2 S_O^2 \right. \\ &\quad + (-2\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_2)j_{LL}j_{LC} S_O^2 \\ &\quad + (\lambda_4 - \lambda_2)j_{LI}j_{LL} S_O S_L \\ &\quad + (\lambda_4 - \lambda_2)j_{LI}j_{LC} S_O S_L \left. \right] + k_L S_L + k_C S_C \\ &\quad + k_R S_I, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_L &= \frac{1}{D} \left[(\lambda_1 - \lambda_2)j_{LL}^2 S_O^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)j_{LL}j_{LC} S_O^2 \right. \\ &\quad + (-\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_4)j_{LI}j_{LL} S_O S_L \\ &\quad + (\lambda_3 - \lambda_1)j_{LI}j_{LC} S_O S_L + (\lambda_4 - \lambda_2)j_{LI}^2 S_L^2 \left. \right] \\ &\quad - k_L S_L, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_C &= \frac{1}{D} \left[(\lambda_1 - \lambda_2)j_{LL}j_{LC} S_O^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)j_{LC}^2 S_O^2 \right. \\ &\quad + (\lambda_2 - \lambda_4)j_{LI}j_{LC} S_O S_L \left. \right] - k_C S_C, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_I &= \frac{1}{D} \left[(\lambda_1 - \lambda_2)j_{LI}j_{LL} S_O S_L + (\lambda_2 - \lambda_4)j_{LI}^2 S_L^2 \right. \\ &\quad + (\lambda_1 - \lambda_3)j_{LI}j_{LC} S_O S_L \left. \right] - k_R S_I, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \frac{1}{D} \left[(\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)j_{LL}^2 S_O \right. \\ &\quad + 2(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3)j_{LL}j_{LC} S_O \\ &\quad + (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_4 - \lambda_2^2 + \lambda_2\lambda_4)j_{LI}j_{LL} S_L \\ &\quad + (\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2)j_{LC}^2 S_O \\ &\quad + (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4)j_{LI}j_{LC} S_L \left. \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 &= \frac{1}{D} \left[(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_4 - \lambda_2^2 + \lambda_2\lambda_4)j_{LI}j_{LL} S_O \right. \\ &\quad + (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4)j_{LI}j_{LC} S_O \\ &\quad + (\lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_4 + \lambda_4^2)j_{LI}^2 S_L \left. \right] + (\lambda_2 - \lambda_1)k_L, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\dot{\lambda}_3 = (\lambda_3 - \lambda_1)k_C, \quad (23)$$

$$\dot{\lambda}_4 = -1 + (\lambda_4 - \lambda_1)k_R, \quad (24)$$

Dengan syarat awal

$$\begin{aligned} S_O(0) &= S_{O0}, \\ S_L(0) &= S_{L0}, \\ S_C(0) &= S_{C0}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$S_I(0) = S_{I0},$$

dan syarat akhir

$$\begin{aligned} \lambda_1(t_f) &= 0, \\ \lambda_2(t_f) &= 0, \\ \lambda_3(t_f) &= 0, \\ \lambda_4(t_f) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Solusi dari persamaan diferensial *state* dan *costate* yang dinyatakan oleh persamaan (17)-(26) merupakan sistem yang sulit diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu digunakan DOTevpSB untuk menyelesaikannya secara numerik.

Simulasi Numerik

Pada bagian ini dibahas solusi numerik dari masalah kendali optimal. Nilai-nilai parameter yang digunakan dalam simulasi numerik diambil dari penelitian Papadakis dkk. (2012:256). Nilai-nilai parameter tersebut disajikan dalam Tabel 1.

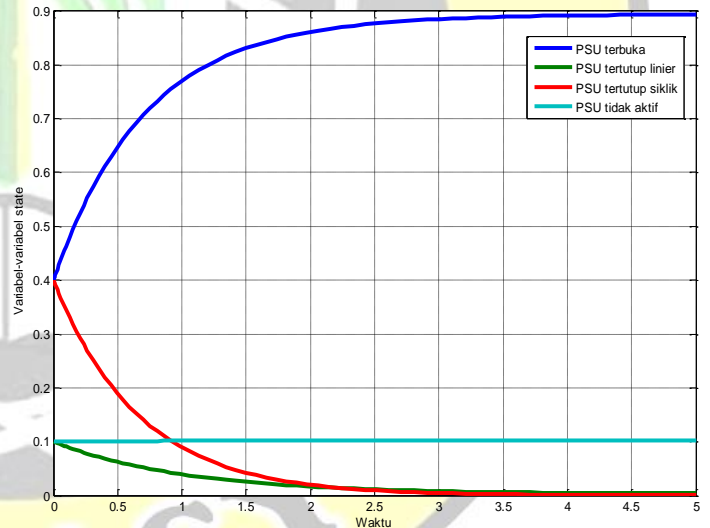
Tabel 1. Nilai Parameter Estimasi Pada Model Pertumbuhan Alga

Parameter	Nilai (Satuan)
α	0.88 (-)
α_C	1.18 (μm^2)
ρ_L	0.4364 (-)
ρ_C	0.0595 (-)
ρ_I	0.3842 (-)
n_L	1.33×10^{-5} (amol photon)
n_C	2.0×10^{-5} (amol photon)
n_I	1.67×10^{-6} (amol photon)
k_L	0.95 (s^{-1})
k_C	1.5 (s^{-1})
k_R	0.0006 (s^{-1})
j_L	9.44×10^{-7} ($\mu^2\text{molhvsel/sPSU}$)
N	5×10^7 (PSU/sel)
I	40 ($\mu\text{molhv/m}^2\text{s}$)

Simulasi numerik sifat kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (5)-(8) yang ditunjukkan pada Gambar 2, memiliki kondisi awal $S_O(0) = 0.4$, $S_L(0) = 0.1$, $S_C(0) = 0.4$, dan $S_I(0) = 0.1$. Dengan kata lain, pada awal

budidaya mikroalga, fraksi PSU terbuka adalah 40 persen, fraksi PSU yang melayani LEF adalah 10 persen, fraksi PSU yang melayani CEF adalah 40 persen, dan fraksi PSU yang tidak aktif adalah 10 persen. Parameter yang digunakan pada simulasi numerik, memenuhi syarat kestabilan, yaitu aliran jaringan PSU inaktif (j_{LI}) lebih besar daripada aliran jaringan menuju CEF (j_{LC}). Oleh karena itu, titik kesetimbangan bersifat stabil. Hal ini terlihat pada Gambar 2.

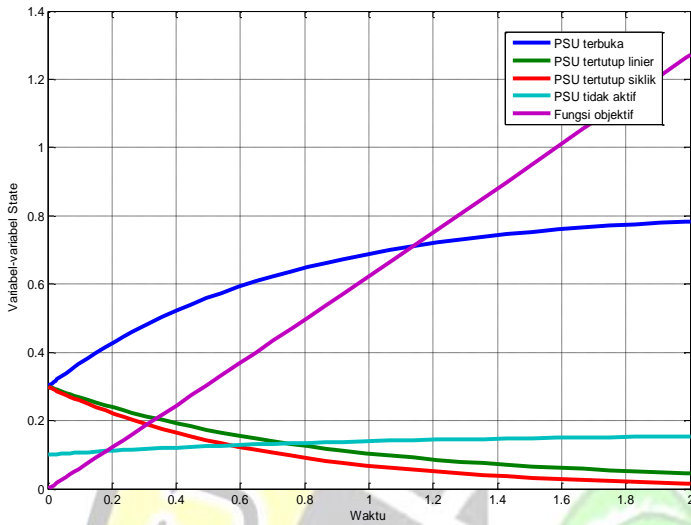
Gambar 2 merupakan perilaku solusi numerik dari sistem (5)-(8). Pada Gambar 2 terlihat bahwa perilaku solusi numerik setelah melewati waktu tertentu, konvergen menuju nilai $S_O = 0.8939000$, $S_L = 0.0035780$, $S_C = 0.0003881$, $S_I = 0.1021000$. Artinya, setelah melewati waktu tertentu, fraksi PSU yang dalam keadaan terbuka adalah konstan sebesar 89 persen, PSU yang dalam keadaan tertutup dan melayani LEF adalah konstan sebesar 0,4 persen, PSU yang dalam keadaan tertutup dan melayani CEF adalah konstan sebesar 0,04 persen, dan PSU yang dalam keadaan tidak aktif adalah konstan sebesar 10 persen. Hal ini mengindikasikan bahwa titik kesetimbangan dari sistem persamaan (5)-(8) bersifat stabil.



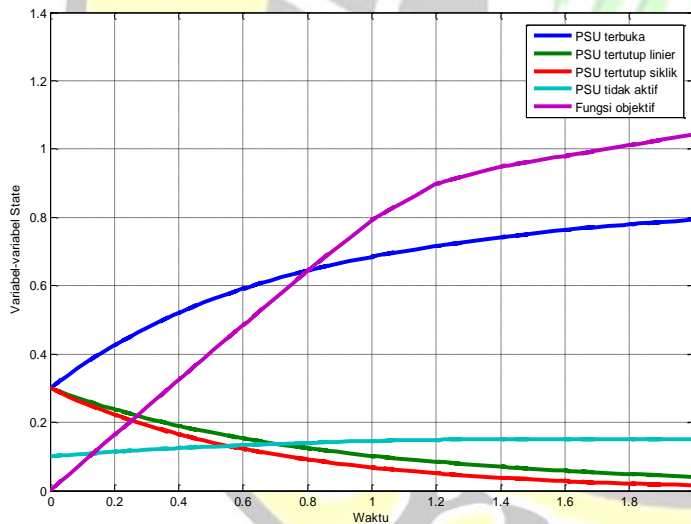
Gambar 2. Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem (5)-(8)

Gambar 3 menunjukkan perilaku sistem tanpa adanya pengendalian intensitas cahaya. Sedangkan Gambar 4 menunjukkan perilaku sistem dengan adanya pengendalian intensitas cahaya. Gambar 3 dan Gambar 4 diperoleh dengan menggunakan kondisi awal $S_O(0) = 0.3$, $S_L(0) = 0.3$, $S_C(0) = 0.3$, dan $S_I(0) = 0.1$. Pada Gambar 3, fraksi-fraksi PSU memiliki nilai akhir $S_O(t_f) = 0.78320$, $S_L(t_f) = 0.04613$, $S_C(t_f) = 0.01623$, dan $S_I(t_f) = 0.1545$, dengan fungsi objektif bernilai 1.271. Sedangkan pada simulasi numerik dengan pengendalian,

yang ditunjukkan oleh Gambar 4, diperoleh nilai akhir dari fraksi-fraksi PSU $S_O(t_f) = 0.79302020$, $S_L(t_f) = 0.04044728$, $S_C(t_f) = 0.01539212$, dan $S_I(t_f) = 0.1511404$, dengan fungsi objektif bernilai 1.042236.



Gambar 3 Solusi Numerik Pertumbuhan Alga Tanpa Pengendalian Intensitas Cahaya



Gambar 4 Solusi Numerik Pertumbuhan Alga dengan Pengendalian Intensitas Cahaya

Dari perbandingan grafik pada Gambar 3 dan Gambar 4 diketahui bahwa dengan adanya pengendalian, fraksi PSU terbuka mengalami peningkatan, sedangkan fraksi PSU yang melayani LEF dan CEF, fraksi PSU tidak aktif serta fungsi objektif mengalami penurunan. Dengan kata lain, adanya pengendalian pada model pertumbuhan mikroalga mengakibatkan jumlah PSU yang dalam keadaan aktif meningkat, sedangkan jumlah PSU dalam keadaan tidak aktif menurun. Hal ini disebabkan oleh optimasi yang dilakukan pada model berusaha untuk

mencegah PSU berada dalam keadaan tidak aktif dengan energi yang seminimal mungkin. Artinya, hasil panen dan energi yang dibutuhkan untuk budidaya mikroalga dengan pengendalian lebih optimal dibandingkan tanpa pengendalian.

Simulasi numerik dilakukan beberapa kali dengan kondisi awal yang berbeda. Hasil simulasi numerik tersebut disajikan dalam Tabel 2. Dari Tabel 2 terlihat bahwa dengan adanya pengendalian, pertumbuhan mikroalga mengalami peningkatan jumlah PSU terbuka, dan penurunan jumlah PSU tertutup, PSU tidak aktif, dan fungsi objektif.

Tabel 2. Perbandingan Nilai-Nilai Variabel State pada Model Pertumbuhan Alga dengan Pengendalian dan Tanpa Pengendalian

Kondisi	Nilai Awal	Nilai Akhir	
		Tanpa Kendali	Dengan Kendali
I	$S_O = 0.4$	$S_O = 0.5519$	$S_O = 0.5616671$
	$S_L = 0.1$	$S_L = 0.02239$	$S_L = 0.01578361$
	$S_C = 0.1$	$S_C = 0.00593$	$S_C = 0.005205153$
	$S_I = 0.4$	$S_I = 0.4198$	$S_I = 0.4173441$
	Fungsi Objektif = 0	Fungsi Objektif = 1.825	Fungsi Objektif = 1.58809
II	$S_O = 0.3$	$S_O = 0.6192$	$S_O = 0.6278362$
	$S_L = 0.2$	$S_L = 0.0331$	$S_L = 0.02779159$
	$S_C = 0.2$	$S_C = 0.01099$	$S_C = 0.01027592$
	$S_I = 0.3$	$S_I = 0.03367$	$S_I = 0.3340963$
	Fungsi Objektif = 0	Fungsi Objektif = 1.648	Fungsi Objektif = 1.3994
III	$S_O = 0.3$	$S_O = 0.7832$	$S_O = 0.7930202$
	$S_L = 0.3$	$S_L = 0.04613$	$S_L = 0.04044728$
	$S_C = 0.3$	$S_C = 0.01623$	$S_C = 0.01539212$
	$S_I = 0.1$	$S_I = 0.1545$	$S_I = 0.1511404$
	Fungsi Objektif = 0	Fungsi Objektif = 1.271	Fungsi Objektif = 1.04224

PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan, diketahui bahwa model pertumbuhan alga dapat dikendalikan dengan cara mengatur intensitas cahaya yang diberikan saat budidaya. Titik kesetimbangan sistem bersifat stabil dengan syarat aliran jaringan PSU inaktif lebih besar daripada aliran jaringan menuju CEF. Masalah kendali optimal dalam model tersebut dapat diselesaikan menggunakan prinsip minimum Pontryagin dan software DOTcvpSB. Dari simulasi numerik dapat diketahui pula bahwa hasil budidaya dengan pengendalian, mengalami peningkatan dibandingkan hasil budidaya tanpa adanya pengendalian.

Selain itu, adanya pengendalian mampu meminimumkan energi yang diperlukan saat budidaya.

Saran

Model yang digunakan dalam penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dari model pertumbuhan alga fotosintetik dengan menambahkan pengaruh suhu, karbon, atau nutrisi lainnya. Dalam penelitian selanjutnya dapat digunakan metode lain untuk menyelesaikan masalah kendali optimal pada model, seperti *Model Predictive Control (MPC)*, *robust control*, dan lain sebagainya. Selain itu, dapat dilakukan dengan menambahkan gangguan (*disturbance*) dalam melakukan simulasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Brannan, J.R. dan Boyce, W.E. 2011. *Differential Equations: An Introduction to Modern Methods and Applications*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Eilers, P.H.C. dan Peeters, J.C.H. 1988. "A Model For The Relationship Between Light Intensity and The Rate of Photosynthesis in Phytoplankton," *Ecological Modelling*, vol 42, hal. 199-215.
- Eilers, P.H.C. dan Peeters, J.C.H. 1993. "Dynamic Behaviour of A Model for Photosynthesis and Photoinhibition," *Ecological Modelling*, vol 69, hal. 113-133.
- Hirmajer, T., Balsa-Canto E. dan Banga J. 2009. "DOTcvpSB, A Software Toolbox for Dynamic Optimization in Systems Biology," *BMC Bioinformatics*, vol. 10, hal. 199.
- Hsu, Hwei P. 1995. *Schaum's Outlines: Signals and Systems*. USA: The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Marshall, J.S. dan Huang Y. 2010. "Simulation of Light-Limited Algae Growth in Homogeneous Turbulence," *Chemical Engineering Science*, vol. 65, hal. 3865-3875.
- Naidu, D.S. 2004. *Optimal Control Systems*. Florida: CRC Press LLC.
- Nauha, E.K. dan Alopeaus V. 2013. "Modeling Method for Combining Fluid Dynamics and Algal Growth in A Bubble Column Photobioreactor," *Chemical Engineering Journal*, vol. 229, hal. 559-568.
- Papadakis, I.A., Kotzabasis K. dan Lika K. 2012. "Modeling The Dynamic Modulation of Light Energy in Photosynthetic Algae," *Journal of Theoretical Biology*, vol. 300, hal. 254-264.
- Robandi, Imam. 2009. *Modern Power System Control*. Yogyakarta: Penerbit ANDI.
- Wu, X. dan Merchuk, J.C. 2001. "A Model Integrating Fluid Dynamics in Photosynthesis and Photoinhibition Processes," *Chemical Engineering Science*. vol. 56, hal. 3527-3528.